

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

FORMULE DI MEDIA PER OPERATORI PARABOLICI

4 FEBBRAIO 1988

SUNTO. Vengono presentate alcune nuove formule di media e di rappresentazione per le soluzioni classiche di equazioni lineari paraboliche in R^{n+1} a coefficienti regolari. Tale formule vengono successivamente utilizzate per approssimare le funzioni superparaboliche mediante successioni di funzioni super-paraboliche di classe C^k , essendo k un arbitrario fissato numero naturale. I risultati esposti sono provati nella nota [GL2].

1. In molte questioni di Teoria del potenziale si presenta la necessità di approssimare le funzioni super-armoniche in R^n mediante successioni di funzioni super-armoniche di assegnata regolarità C^k , $k \geq 0$. E' ben noto che questi procedimenti di approssimazione possono venire realizzati mediante gli usuali operatori di mollificazione. Nella stessa maniera si può procedere per le supertemperature in R^{n+1} , cioè per le soprasoluzioni dell'operatore del calore $H = \Delta - \partial_t$. Infatti, se $u \in L^1_{loc}(R^{n+1})$ è tale che $Hu \leq 0$ (nel senso delle distribuzioni) e se $J_\epsilon * u$ è l'usuale operatore di moltiplicazione, poiché H è un operatore a coefficienti costanti, risulta

$$H(J_\epsilon * u) = J_\epsilon * Hu \leq 0, \quad J_\epsilon * u \in C^\infty(R^{n+1})$$

Evans e Gariepy ([EG]) nella loro prova del criterio di Wiener usano in modo essenziale tale procedimento di approssimazione.

Volendo estendere il criterio di Wiener agli operatori parabolici

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z) \partial_i \partial_j - \partial_t,$$

($z = (x, t) \in R^n \times R$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_t = \partial/\partial t$) si presenta in modo naturale il problema di approssimazione sopra descritto, nel contesto più generale degli operatori a coefficienti variabili, contesto nel quale gli usuali mollificatori sono del tutto inefficaci. Basta infatti osservare che $J_\epsilon * u$ non è soluzione dell'equazione $Lv = 0$ se u lo è.

Per affrontare in modo adeguato il problema di approssimazione sopra esposto per gli operatori a coefficienti variabili, ci si può ispirare al più classico dei metodi di regolarizzazione delle funzioni superarmoniche in \mathbb{R}^n , basato sull'uso degli operatori di media

$$u \rightarrow u_r, \text{ dove } u_r(x) = \int_{|x-y|<r} u(y) dy$$

E' ben noto che l'operatore $u \rightarrow u_r$ è un operatore che preserva la superarmonicità. Inoltre, se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora $u_r \in C(\mathbb{R}^n)$ e, se $u \in C(\mathbb{R}^n)$ allora $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$D_j u_r(x) = \int_{\partial B(0,r)} u(x+y) d\sigma(y)$$

Da questa formula segue facilmente che $u_r \in C^{k+1}$ se $u \in C^k$. Inoltre, se u è superarmonica, allora $u_r \uparrow u$ per $r \downarrow 0$. Pertanto, se u è superarmonica in \mathbb{R}^n , fissato $m \in \mathbb{N}$ e posto

$$v_r = (\dots (\underbrace{(u_r)_r}_{m+1} \dots)_r, \dots)_r,$$

risulta $v_r \in C^m$, v_r superarmonica e $v_r \uparrow u$ per $r \downarrow 0$.

La regolarizzazione delle funzioni superarmoniche si può anche ottenere mediante un procedimento di *superposizione* delle medie u_r .

Sia $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$, $\text{supp } \phi \subseteq]0, 1[$ e

$$\int_0^1 \phi(t) dt = 1.$$

Per ogni $r > 0$ poniamo

$$J_r u(x) = \int_0^{+\infty} u_\rho(x) \left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{d\rho}{r}.$$

Dalle proprietà di u_ρ si deduce subito che J_r preserva la superarmonicità; inoltre $J_r u + u$ per $r > 0$ se u è superarmonica.

Si ha poi (ω_n = misura di $B(0,1)$)

$$\begin{aligned} J_r u(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{|x-y| < \rho} u(y) dy \right) \frac{1}{\omega_n \rho^n} \phi\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{d\rho}{r} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \psi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) r^{-n} dy \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\psi(t) = \int_t^{+\infty} \omega_n \frac{\phi(s)}{s^n} ds.$$

Ovviamente $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq \int_0^{+\infty} \omega_n \frac{\phi(s)}{s^n} ds$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy = 1.$$

$J_r u$ è quindi l'usuale operatore di mollificazione e $J_r u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Si può quindi presumere che, disponendo di formule di media per le soluzioni dell'equazione a coefficienti variabili $Lu = 0$, a partire da quelle, mediante un procedimento di superposizione, si ottengano i *naturali* mollificatori per l'operatore L .

2. In \mathbb{R}^{n+1} consideriamo l'operatore parabolico

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij}(z) \partial_j) - \partial_t$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed esiste $\nu > 0$:

$$v^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z) \xi_i \xi_j \leq v|\xi|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo inoltre che esista un compatto $F_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$: $a_{ij}(z) = \delta_{ij}$ per ogni $z \notin F_0$. Sotto queste ipotesi esiste per L una soluzione fondamentale $\Gamma(z, \zeta)$ di classe C^∞ nel complementare della diagonale di $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Per ogni $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ e per ogni $r > 0$ chiamiamo L -palla parabolica di centro z e raggio r l'insieme

$$\Omega_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n+1} / \Gamma(z, \zeta) > (4\pi r)^{-n/2}\}$$

In [GL.2] abbiamo provato la seguente formula di rappresentazione per le funzioni $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$(2.1) \quad u(z) = u_r(z) - \frac{n}{2} r^{-n/2} \int_0^r \int_{\Omega_\ell(z)} Lu(\zeta) [\Gamma(z, \zeta) - (4\pi \ell)^{-n/2}] d\zeta d\ell$$

dove

$$(2.2) \quad u_r(z) = (4\pi r)^{-n/2} \int_{\Omega_r(z)} u(\zeta) E(z, \zeta) d\zeta,$$

$$E(z, \zeta) = \frac{A(\zeta) D_\xi \Gamma(z, \zeta) \cdot D_\xi \Gamma(z, \zeta)}{\Gamma^2(z, \zeta)}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

In particolare $Lu = 0$ in \mathbb{R}^{n+1} se e solo se

$$u(z) = u_r(z) \quad \forall r > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n+1}$$

(questo risultato è anche provato in [FG]).

Ora il nucleo $E_r = (4\pi r)^{-n/2} E$ che compare nell'operatore di media $u \rightarrow u_r$ non è regolare. Infatti se, ad esempio, $L = \Delta - \partial_t$ è l'operatore del calore in \mathbb{R}^{n+1} si ha

$$E_r(z, \zeta) = (4\pi r)^{-n/2} |x - \xi|^2 / 4(t - \tau)^2$$

Per ottenere formule di media con nuclei più regolari di E_r , procediamo nel modo seguente. Anzitutto derivando (2.1) rispetto ad r si ottiene

$$\frac{d}{dr} u_r(z) = \frac{n}{2r} (4\pi r)^{-n/2} \int_{\Omega_r(z)} Lu(\zeta) \ln((4\pi r)^{n/2} \Gamma(z, \zeta)) d\zeta$$

Integrando queste identità rispetto ad r , dopo aver osservato che

$$u_r(z) \rightarrow u(z) \quad \text{per } r \rightarrow 0,$$

si ricava

$$(2.3) \quad u(z) = u_r(z) - \frac{n}{2} (4\pi)^{-n/2} \int_0^r \xi^{-n/2-1} \left(\int_{\Omega_\xi(z)} Lu(\zeta) \ln((4\pi \xi)^{n/2} \Gamma(z, \zeta)) d\zeta \right) d\xi.$$

Seguendo un'idea già utilizzata da Kupcov ([K]) nel caso di $L = \Delta - \partial_t$, fissiamo ora $m \in \mathbb{N}$ e consideriamo in R^{n+m+1} l'operatore

$$\tilde{L} = L + \Delta_y$$

dove Δ_y indica l'operatore di Laplace in R^m . Ora, poiché

$$\tilde{L}(u(x, t)v(y, t)) = (Lu)v + u(\Delta_y - \partial_t)v,$$

è facile riconoscere che la soluzione fondamentale \hat{r} di \tilde{L} si scrive nel modo seguente

$$\hat{r}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = r(x, t; \xi, \tau) K(y - \eta, t - \tau)$$

dove K è la soluzione fondamentale di $\Delta_y - \partial_t$:

$$K(y - \eta, t - \tau) = (4\pi(t - \tau))^{-m/2} \exp\left(-\frac{|y - \eta|^2}{4(t - \tau)}\right) \quad \text{per } t > \tau.$$

Applichiamo ora la formula di rappresentazione (2.3) alla funzione

$$\hat{u}(z) = \hat{u}(x, y, t) = u(x, t)$$

ed all'operatore \hat{L} . Si ha

$$(2.4) \quad u(z) = \hat{u}_r(x, y, t) - \frac{n+m}{2} (4\pi)^{-\frac{n+m}{2}} \int_0^r \int_{\hat{\Gamma}(z, \tilde{z})} \hat{L}u(\zeta) \ln((4\pi)^{\frac{n+m}{2}} \hat{r}(\hat{z}, \tilde{\zeta})) d\zeta d\tilde{z}$$

dove

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \hat{u}_r(z) &= (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \int_{\hat{\Gamma}(z, \tilde{z}) > (4\pi r)^{-n+m/2}} \hat{u}(\tilde{z}) \hat{E}(\hat{z}, \tilde{z}) d\tilde{z} \\ &= (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \int_{\hat{\Gamma}(z, \tilde{z}) > (4\pi r)^{-n+m/2}} u(\zeta) \left[E(z, \zeta) + \frac{|y - \eta|^2}{4(t - \tau)^2} \right] d\zeta d\eta dt. \end{aligned}$$

Ora $\hat{\Gamma}(z, \tilde{z}) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$ se e solo se

$$\phi(z, \zeta) \equiv (4\pi(t - \tau))^{-m/2} r(z, \zeta) > \exp\left(\frac{|y - \eta|^2}{4(t - \tau)}\right) (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$$

od anche se, e solo se,

$$|y-\eta|^2 \leq 4(t-\tau) \ln((4\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \phi(z, \zeta)) \equiv R_r^2(z, \zeta)$$

Eseguendo nell'integrale all'ultimo membro della (2.5) l'integrazione rispetto alla variabile n , si ottiene

$$(2.6) \quad \bar{u}_r(z) = \int_{\Omega_r^{(m)}(z)} u(\zeta) E_r^{(m)}(z, \zeta) d\zeta$$

dove

$$(2.7) \quad \Omega_r^{(m)}(z) = \{\zeta \in R^n \mid \phi(z, \zeta) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}\}$$

e

$$(2.8) \quad E_r^{(m)}(z, \zeta) = (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} R_r^m(z, \zeta) (E(z, \zeta) + \frac{m}{n+2} \frac{R_r^2(z, \zeta)}{4(t-\tau)^2})$$

Notiamo che al secondo membro della (1.6) la variabile aggiunta y non appare più. Procedendo in modo analogo anche nel secondo integrale al secondo membro di (2.4), infine si ottiene

$$(2.9) \quad u(z) = u_r^{(m)}(z) - C_{n,m} \int_0^r \ell^{-\frac{n+m}{2}} \left(\int_{\Omega_\ell^{(m)}(z)} Lu(\zeta) \frac{R_\ell^{m+2}(z, \zeta)}{4(t-\tau)} d\zeta \right) d\ell$$

dove $C_{n,m}$ è una costante positiva che dipende solo da n e da m ; inoltre

$$(2.10) \quad u_r^{(m)}(z) = \int_{\Omega_r^{(m)}(z)} u(\zeta) E_r^{(m)}(z, \zeta) d\zeta$$

Dalla (2.9) si ricava subito che $Lu=0$ se e solo se $u = u_r^{(m)}$ per ogni $r>0$.

Il nucleo $E_r^{(m)}$ che figura in (2.10) è tanto più regolare quanto più m è grande. Infatti

$$R_r^2(z, \zeta) = (t-\tau) O(\ln(t-\tau)) \quad \text{per } t \rightarrow \tau$$

Dagli operatori di media $u \rightarrow u_r^{(m)}$, con un procedimento di superposizione analogo a quello descritto precedentemente nel caso armonico classico, si possono facilmente ottenere operatori di regolarizzazione che, come vedremo, conservano il segno di Lu . Scegliamo una funzione $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ tale che

$$\phi \geq 0, \quad \text{supp } \phi \subseteq]1, 2[, \quad \int_0^{+\infty} \phi(r) dr = 1.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo

$$J_r^{(m)} u(z) = \int_0^{+\infty} u_\ell^{(m)}(z) \left(\frac{\ell}{r}\right) \frac{d\ell}{r}.$$

Sostituendo ad u_ℓ la sua espressione data da (2.10), dopo uno scambio dell'ordine di integrazione, si ottiene

$$J_r^{(m)} u(z) = \int_{R^{n+1}} u(\zeta) M_r^{(m)}(z, \zeta) d\zeta$$

dove

$$M_r^{(m)}(z, \zeta) = \int_{(4\pi\phi(z, \zeta)^{2/n+m})^{-1}}^{+\infty} E_\ell^{(m)}(z, \zeta) \left(\frac{\ell}{r}\right) \frac{d\ell}{r}$$

Si osservi che $M_r^{(m)}(z, \cdot)$ ha il supporto contenuto nella palla parabolica $\Omega_{2r}^{(m)}(z)$ in quanto $\text{supp } \phi \subseteq]1, 2[$.

A questo punto, utilizzando gli sviluppi asintotici di r e delle sue derivate provati in [GL.2], si dimostra con relativa facilità il seguente

Lemma. Per ogni $v \in \mathbb{N}$ e per ogni multi-indice intero non negativo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ tale che $|\alpha| \leq v$, esistono $m = m(v) \in \mathbb{N}$ ed una costante $C = C(\alpha, r, m) > 0$ tali che

$$|D_z^{\alpha} M_r^{(m)}(z, \zeta)| \leq C \quad \forall z = \zeta.$$

Fissato quindi $v \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $J_r^{(m)} u \in C^v$ per ogni $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

3. In questo paragrafo illustreremo la connessione esistente fra gli operatori $u \rightarrow u_r^{(m)}$ e $J_r^{(m)}$ e le funzioni super L-paraboliche.

Un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ si dice L-regolare se il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } V \\ u|_{\partial V} = \phi \end{cases}$$

ha una (sola) soluzione $u \in C^\infty(V) \cap C(\bar{V})$, per ogni $\phi \in C(\partial V)$.

Indichiamo tale soluzione con H_ϕ^V . Ebbene, una funzione $u: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice super L-parabolica se u è inferiormente semicontinua, finita in un sottoinsieme denso di \mathbb{R}^{n+1} e se inoltre, per ogni aperto L-regolare V e per ogni

$\phi \in C(\partial V)$ con $\phi \leq u/\partial V$, risulta $H\phi \leq u$ in V . Si può provare (Cfr. ad es. [NS]) che una funzione u è super L-parabolica se e solo se $u \in L_1^{loc}(R^n)$ e $Lu \leq 0$ in $\mathcal{D}'(R^n)$.

Utilizzando questo risultato e la formula di rappresentazione (2.9), si può provare che u è super L-parabolica se e solo se

$$u \geq u_r^{(m)} \quad r \in]0, r_0[.$$

Un'altra fondamentale proprietà degli operatori $u \mapsto u_r^{(m)}$ è la seguente: se u è super L-parabolica in R^{n+1} allora anche $u_r^{(m)}$ lo è.

La prova di questa affermazione non è semplice come le precedenti e si basa sulla idea seguente: poichè u è super L-parabolica, per un teorema di rappresentazione di tipo Riesz risulta, almeno localmente,

$$(3.1) \quad u = r_\mu + h$$

dove $h \in C^\infty$, $Lh = 0$, μ è una misura di Radon non negativa e r_μ è il r potenziale di μ :

$$r_\mu(z) = \int_{R^{n+1}} r(z, \zeta) d\mu(\zeta)$$

D'altra parte, per i risultati precedenti, per provare che u_r è super L-parabolica, basta provare che u_r verifica la proprietà di super-media:

$$(3.2) \quad u_r \geq (u_r)_\rho$$

per ogni $\rho \leq \rho_0$. Utilizzando la (3.1) la verifica di (3.2) viene ricondotta alla seguente

$$(3.3) \quad ((r(\cdot, \zeta))_r)_\rho \leq (r(\cdot, \zeta))_r$$

per ogni $\rho \leq \rho_0$ e per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Le (3.3) viene provata direttamente utilizzando in modo essenziale ancora la formula di rappresentazione (2.9).

Una ulteriore proprietà degli operatori $u_r^{(m)}$ è la seguente: se u è super-parabolica in \mathbb{R}^{n+1} allora $u_r^{(m)} \nearrow u$ per $r \searrow 0$.

Ora, per superposizione, tutte le proprietà enunciate di sopra per gli operatori $u \rightarrow u_r^{(m)}$ si estendono immediatamente agli operatori $J_r^{(m)}$. Si ottiene così il seguente

Teorema. Sia u una funzione super L -parabolica in \mathbb{R}^{n+1} e sia $v \in \mathbb{N}$ fissato. Allora esiste una successione di funzioni (u_j) tali che:

- (i) $u_j \in C^v(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- (ii) u_j è super L -parabolica in $\mathbb{R}^{n+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- (iii) $u_j \nearrow u$ per $j \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Basta porre $u_j = J_{r_j}^{(m)} u$ con $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande e con $r_j \searrow 0$.

4. Le formule di medie provate nei precedenti paragrafi e gli sviluppi asintotici di I e delle sue derivate provate in [GL2] possono venire utilizzate per dimostrare in modo del tutto elementare la disuguaglianza di Harnack per le soluzioni non negative dell'equazione $Lu = 0$.

Teorema. Sia D un aperto di \mathbb{R}^{n+1} e sia $u \geq 0$ una soluzione di $Lu = 0$. Sia $z_0 \in D$ e sia $r_0 > 0$ tale che $\Omega_{4r}^{(m)}(z_0) \subseteq D$. (m è un fissato naturale > 2). Fissato $\epsilon \in]0, 1[$, sia $z = (x, t) \in \Omega_r^{(m)}(z_0)$ con $t - t_0 \geq \epsilon r$. Allora

$$u(z) \leq C u(z_0)$$

dove $C = C(L, m, \epsilon)$.

Dimostrazione. Poichè $Lu = 0$ risulta

$$u(z_0) = \int_{\Omega_{3r}^{(m)}(z_0)} u(\zeta) E_{3r}^{(m)}(z_0, \zeta) d\zeta.$$

Ora se $z = (x, t) \in \Omega_r^{(m)}(z_0)$ e $t - t_0 \geq \epsilon r$ esiste $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$\Omega_{\delta r}^{(m)}(z) \subseteq \Omega_{3r}^{(m)}(z_0).$$

Pertanto, poichè $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} u(z_0) &\geq \int_{\Omega_{\delta r}^{(m)}(z)} u(\zeta) E_{3r}^{(m)}(z, \zeta) d\zeta = \\ &= \int_{\Omega_{\delta r}^{(m)}(z)} u(\zeta) E_{\delta r}^{(m)}(z, \zeta) \frac{E_{3r}^{(m)}(z_0, \zeta)}{E_{\delta r}^{(m)}(z, \zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

Ora, esistono due costanti positive C_1 e C_2 , indipendenti da r , tali che

$$E_{3r}^{(m)}(z_0, \zeta) \geq C_1 r^{-\frac{n}{2}+1} \quad \forall \zeta \in \Omega_{\delta r}^{(m)}(z),$$

$$E_{\delta r}^{(m)}(z, \zeta) \leq C_2 r^{-\frac{n}{2}+1} \quad \forall \zeta \in \Omega_{\delta r}^{(m)}(z).$$

Pertanto

$$u(z_0) \geq \frac{C_1}{C_2} \int_{\Omega_{\delta r}^{(m)}(z)} u(\zeta) E_{\delta r}^{(m)}(z, \zeta) d\zeta = \frac{C_1}{C_2} u(z).$$

BIBLIOGRAFIA

- [EG] L.C. EVANS, R.F. GARIEPY, Wiener's criterion for the heat equation, Arch. Rat. Mech. An. 78 (1982), 293-314.
- [FG] E.B. FABES, N. GAROFALO, Mean value properties of solution to parabolic equation with variable coefficients, Journal of Math. An. Appl. 121 (1987), 305-316.
- [GL1] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [GL2] _____, Asymptotic Behavior of Fundamental Solutions and Potential Theory of Parabolic Operators with variable Coefficients, to appear in Math. Ann..
- [K] L.P. KUPCOV, The mean property and the maximum principle for the parabolic equation of second order, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1140-1144.
- [NS] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI, Superharmonic function and regularity of boundary points for a class of elliptic parabolic differential operators, BUMI, C(3), 1 (1984), 85-107.